HOOFDSTUK IV

GESLOTEN TRILLINGSKRINGEN

1. Inleiding

Onder gesloten trillingskringen worden die kringen verstaan, die zo zijn opgebouwd, dat uitstraling van energie tengevolge van de optredende trillingen tot een minimum is beperkt. Dat wordt bereikt door de onderdelen als spoelen en condensatoren in de kleinst mogelijke ruimte te concentreren in tegenstelling met de open trillingskringen, welke, b.v. in de vorm van antennestelsels, worden gebruikt om de uitstraling van e.m. golven zo veel mogelijk te bevorderen. De gesloten trillingskringen vervullen echter in de radiotechniek zulk een belangrijke functie, dat ze grondig moeten worden bestudeerd.

In de eerste plaats zal het onderzoek betrekking hebben op het bepalen van de resonantiefrequenties, want er moeten in het algemeen meerdere resonantiegevallen worden onderscheiden, nl.:

a. stroomresonantie, waarbij de stroom in de kring maximum is;

b. spanningsresonantie, waarbij de over capaciteit of zelfinductie van de kring ontwikkelde spanning maximum is;

c. phaseresonantie, waarbij de phaseverschuiving tussen stroom en spanning nul is.

In de tweede plaats is het van belang te weten, hoe de kring zich buiten resonantie gedraagt, want een van de belangrijkste eigenschappen van een trillingskring is het verschil in gedrag ten opzichte van gedwongen trillingen van verschillende frequentie. Hiermede hangt b.v. de selectiviteit, resp. de bandbreedte van een ontvanger samen.

Om de afleidingen en formules zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijk te houden, zullen, behalve de symbolische of complexe rekenwijze [1]), enige afkortingen en verhoudingsgetallen worden gebruikt. Dat zijn:

a. de eigenfrequentie f_0 van de betrokken kring en de daarmede overeenkomende cirkelfrequentie ω_0, welke te berekenen is uit $\omega_0{}^2 = 1/LC$;

b. de zogenaamde relatieve verstemming om aan te geven, dat de kring bij een andere als de eigenfrequentie wordt beschouwd; de relatieve verstemming β is gedefinieerd als

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}$$

en is dus een onbenoemd getal;

c. de kwaliteitsfactor Q van de kring, dat is de verhouding van de bij de eigenfrequentie werkzame inductieve of capacitieve reactantie ($\omega_0 L = 1/\omega_0 C$)

[1]) Een korte inleiding tot de symbolische rekenwijze is gegeven in Aanhangsel I.

tot de in de kring werkzame weerstand R, dus:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

en is eveneens een onbenoemd getal, waarvan de betekenis verderop nader zal worden besproken.

2. Bepaling van de resonantiefrequenties

Er zijn twee mogelijkheden om met een spoel en een condensator een trillingskring voor gedwongen trillingen samen te stellen:

a. spoel en condensator worden in serie geschakeld en aangesloten op een spanningsbron;

b. spoel en condensator worden parallel geschakeld en aangesloten op een stroombron.

Natuurlijk zijn er andere voedingsmogelijkheden van de kringen, maar die kunnen door omrekening worden teruggebracht tot de bovengenoemde. Er zal worden aangenomen, dat de bron een spanning, resp. stroom van constante amplitude levert, doch dat de frequentie variabel is. In beide gevallen moet natuurlijk rekening worden gehouden met de onvermijdelijke in de kring aanwezige weerstand, waarin energie wordt verbruikt. Er worden geen grove fouten gemaakt als in eerste instantie wordt aangenomen, dat die weerstand in serie met de spoel staat. Verderop zal worden aangetoond, dat het energieverbruik (verlies) door anders geschakelde weerstanden toch wel in rekening kan worden gebracht alsof het door een denkbeeldige weerstand (meestal van andere waarde dan de werkelijk aanwezige weerstand) in serie met de spoel werd veroorzaakt.

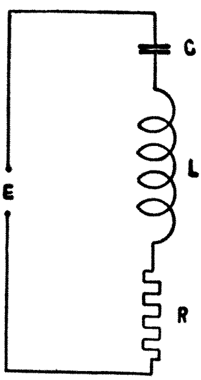

Fig. 4.1

2.1. SERIESCHAKELING

Een wisselspanning $e = E \sin \omega t$ met constante amplitude, doch veranderlijke frequentie, is aangesloten op de serieschakeling van een capaciteit C en een zelfinductie L met weerstand R (zie fig. 4.1). De stroom, die in de kring optreedt is dan:

$$i = \frac{E}{|Z|} \sin (\omega t + \varphi),$$

waarin $|Z|$ de absolute waarde van de impedantie van de kring bij de cirkelfrequentie ω is, en φ de phaseverschuiving van de stroom ten opzichte van de spanning. De impedantie is de modulus van

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad \textbf{(IV, 1a)}$$

terwijl de phaseverschuiving φ is bepaald door

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}. \qquad \textbf{(IV, 2b)}$$

Met de bovengenoemde afkortingen kan daarvoor worden geschreven:

$$Z = R(1 + j\beta Q) \tag{IV, 1c}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \beta Q \tag{IV, 1d}$$

De omwerking van (IV, 1a) tot (IV, 1c) gaat als volgt. Voor de reactantie van de kring kan worden geschreven:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_0} \right) = \omega_0 L \beta.$$

Wordt nu in de uitdrukking voor Z de term R buiten haakjes gebracht, dan wordt gevonden

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\omega_0 L\beta = R(1 + j\beta Q).$$

Uit (IV, 1c) volgt nu: $|Z| = R\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}$. Het is nu gemakkelijk in te zien, dat de waarde van de stroomamplitude I maximum wordt als βQ gelijk aan nul is, dus als het imaginaire deel van Z gelijk aan nul is. Dat is het geval voor die frequentie, waarvoor $\beta = 0$. Uit deze voorwaarde volgt zowel de frequentie, waarbij stroomresonantie optreedt, als die waarbij phaseresonantie voorkomt, want ook de phaseverschuiving is nul, als het imaginaire deel van de symbolische uitdrukking voor de impedantie nul is. Uit de voorwaarde $\beta = 0$ wordt gemakkelijk gevonden:

$$\boldsymbol{\omega_{rs} = \omega_{rp} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{IV, 2}$$

Bij de seriekring is de eigenfrequentie van de kring dus tevens de frequentie, waarbij stroom- en phaseresonantie optreedt.

De berekening van de frequenties, waarbij spanningsresonantie optreedt, gaat als volgt. De amplitude van de spanning over de spoel, resp. over de condensator is gelijk aan:

$$E_L = Ij\omega L = \frac{Ej\omega L}{R(1 + j\beta Q)},$$

$$E_C = \frac{I}{j\omega C} = \frac{E}{j\omega CR(1 + j\beta Q)}.$$

De absolute waarden van die spanningen zijn dus:

$$|E_L| = \frac{E\omega L}{R\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{IV, 3a}$$

$$|E_C| = \frac{E}{\omega CR\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{IV, 3b}$$

Wordt volgens de methode van de hogere wiskunde berekend voor welke waarden van ω de spanningen $|E_L|$ en $|E_C|$ maximum worden, dan wordt resp. gevonden:

$$\omega_{rL} = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} \tag{IV, 4}$$

$$\omega_{rC} = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}} \tag{IV,5}$$

Hieruit volgt $\omega_{rL} . \omega_{rC} = \omega_0{}^2$, d.w.z. dat de eigenfrequentie f_0 het middelevenredige is van de frequenties, waarbij spanningsresonantie over de spoel, resp. de condensator optreedt.

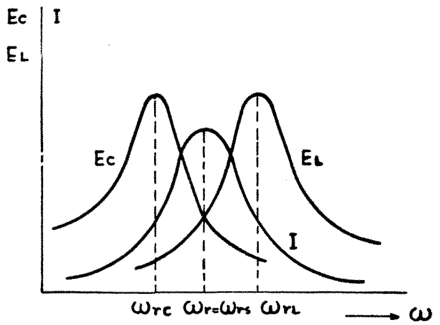

Fig. 4.2

De onderlinge ligging van de verschillende resonantiefrequenties is het gemakkelijkst in te zien, als de waarden van de kringstroom

$$|I| = \frac{E}{|Z|} = \frac{E}{\sqrt{1 + \beta^2 Q^2}}$$

en die van de spanningen $|E_L|$ en $|E_C|$ volgens (IV, 3a) en (IV, 3b) als functie van de cirkelfrequentie ω in krommen worden uitgezet. Het verloop van die krommen en hun ligging ten opzichte van elkaar bij een bepaalde waarde van Q is geschetst in fig. 4.2, waarin de verschillende resonantiefrequentie duidelijk zijn te onderkennen. Uit (IV, 4) en (IV, 5) is duidelijk te zien, dat ω_{rL} en ω_{rC} steeds dichter bij ω_0 komen te liggen als Q groter wordt gemaakt, zodat men kan stellen: als Q maar groot genoeg is, vallen de resonantiefrequenties praktisch alle samen met de eigenfrequentie van de trillingskring. Daar in de radiopraktijk steeds wordt gewerkt met kringen, waarvan de kwaliteitsfactor groter dan ongeveer 40 is, kan dus praktisch ook wel worden gesproken van de resonantiefrequentie van een kring, omdat alle resonantiefrequenties dan samenvallen met de eigenfrequentie f_0 van de kring.

Uit (IV, 3a) en (IV, 3b) kan ook een inzicht worden gewonnen omtrent de betekenis van de kwaliteitsfactor Q van de kring. Voor resonantie van de kring moet immer $\beta = 0$ zijn en dat is het geval als $\omega = \omega_0$. Maar onder die omstandigheden volgt uit de aangehaalde uitdrukkingen:

$$|E_L|_0 = \frac{E\omega_0 L}{R} = QE, \text{ resp. } |E_C|_0 = \frac{E}{\omega_0 CR} = QE,$$

waarin door de index 0 is aangegeven, dat het resonantiegeval is bedoeld. In resonantie is de over de spoel, resp. de condensator ontwikkelde spanning Q-maal zo groot als de op de kring aangesloten spanning. Dat wordt wel eens de spanningsopslingering of kortweg opslingering van de kring genoemd. Buiten resonantie is ook nog wel enig opslingereffect merkbaar, maar dat is in elk geval veel geringer als in resonantie.

2.2. PARALLELSCHAKELING

Een stroom $i = I \sin \omega t$ wordt toegevoerd aan een kring, bestaande uit de parallelschakeling van een capaciteit C en een zelfinductie L met weerstand R (L en R in serie, zie fig. 4.3). De spanning, die dan over de kring tussen de punten A en B wordt ontwikkeld is:

$$e = E \sin (\omega t + \varphi),$$

waarin: $E = I|Z|$, $|Z|$ de absolute waarde van de impedantie van de kring, φ phaseverschuiving tussen stroom en spanning.

De impedantie $|Z|$ is dus de modulus en φ het argument van de complexe impedantie Z van de schakeling. Deze is:

$$Z = \frac{(R + j\omega L)\dfrac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

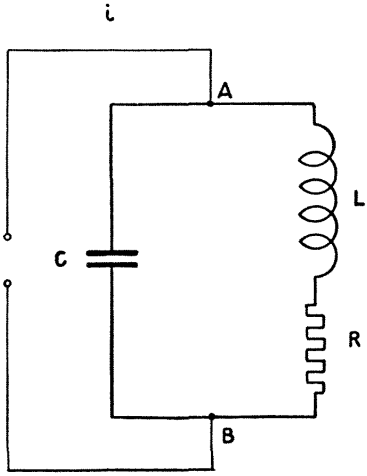

Fig. 4.3

waaruit door invoering van de eigenfrequentie en de kwaliteitsfactor volgens de gegeven definitie volgt:

$$Z = \frac{R\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\cdot\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\,\omega_0 CR} = \frac{R\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}Q\right)}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{\omega_0}\cdot\dfrac{1}{Q}}. \qquad \textbf{(IV, 6)}$$

Voor phaseresonantie moet worden voldaan aan de voorwaarde, dat het imaginairedeel van de uitdrukking voor Z nul is, met andere woorden dat Z reëel wordt.

Dat is het geval als:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = Q^2 \qquad \textbf{(IV, 7)}$$

De frequentie, waarbij phaseresonantie optreedt, is dus bepaald door:

$$\omega_{rp} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \qquad \textbf{(IV, 8)}$$

Daaruit volgt door invullen van de uitdrukkingen voor ω_0 en Q:

$$\omega_{rp} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \tag{IV, 9}$$

Bij deze frequentie treedt tevens spanningsresonantie op, want bij phaseverschuiving nul is de impedantie van de kring, die dan zuiver ohms is, maximum, zodat bij een gegeven stroom de spanning over de kring maximum is (zie § 4).

De uitdrukking (IV, 6) is van de vorm $z = (a + jb)/(c + jd)$, waarvan nu moet worden onderzocht, welke betrekking tussen a, b, c en d moet bestaan om z reëel te maken. We kunnen schrijven:

$$z = \frac{a}{c} \cdot \frac{1 + j\dfrac{b}{a}}{1 + j\dfrac{d}{c}} = \frac{b}{d} \cdot \frac{\dfrac{a}{b} + j}{\dfrac{c}{d} + j}.$$

Indien nu $b/a = d/c$ of $bc = ad$, dan is z reëel en gelijk aan a/c, doch ook gelijk aan b/d.
Dus z is reëel (imaginaire deel gelijk aan nul) als:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Deze stelling toegepast op (IV, 6) geeft de voorwaarde (IV, 7) voor de berekening van de frequentie, waarbij phaseresonantie optreedt.

De frequenties, waarbij stroomresonantie optreedt, worden berekend door te onderzoeken onder welke voorwaarden de stroom door de inductieve tak, resp. door de capacitieve tak maximum wordt. Er worden soortgelijke uitdrukkingen als (IV, 4) en (IV, 5) gevonden, d.w.z. dat in dit geval de eigenfrequentie het middelevenredige is van de frequenties waarbij stroomresonantie optreedt. Ook in dit geval geldt praktisch, bij waarden van Q die boven ca. 40 liggen, dat alle resonantiefrequenties samenvallen met de eigenfrequentie. De opslingering betreft hier de stroom; bij de resonantiefrequentie zijn de stromen in de capacitieve en de inductieve tak van de kring Q-maal zo groot als de aan de schakeling toegevoerde stroom.

In het vervolg zullen we de resonantiefrequentie van een gesloten trillingskring steeds berekenen uit de voorwaarde voor phaseresonantie, d.w.z. door te onderzoeken onder welke voorwaarde de complexe impedantie tegen de toegevoerde spanning of stroom reëel wordt.

2.3. DE BETEKENIS VAN DE KWALITEITSFACTOR Q

Zonder nader in te gaan op de betekenis is de kwaliteitsfactor gedefinieerd. Ook is aangetoond van welke invloed die factor is op verschillende belangrijke eigenschappen van gesloten trillingskringen, zoals de resonantiefrequenties en de opslingering van spanning of stroom. De werkelijke betekenis van Q is echter nog verborgen gebleven.

Om die betekenis te onderkennen zullen we de grootheid $\omega_0/Q = L/R$ beschouwen en wel voor de bij de eigenfrequentie optredende stroomamplitude I_0 in de seriekring. Dan is $\frac{1}{2}RI_0{}^2$ niets anders dan het bij die frequentie optredende energieverbruik (verlies) in de kring, terwijl $\frac{1}{2}LI_0{}^2$ gelijk is aan de energie die in de kring de trilling onderhoudt doordat hij regelmatig van magnetische energie in de spoel wordt omgezet in elektrische energie van de condensator en omgekeerd. Die energie zullen we kortheidshalve de energievoorraad in de kring noemen. Uit deze overwegingen volgt dus:

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} = \frac{\frac{1}{2}RI_0{}^2}{\frac{1}{2}LI_0{}^2} = \frac{\text{energieverbruik}}{\text{energievoorraad}} \qquad \textbf{(IV, 10)}$$

De kwaliteitsfactor Q is dus een directe maat voor de verhouding van de bij de eigenfrequentie in de kring voorradige energie tot het verbruik van de kring per periode (het verlies).

Nu de betekenis van Q is vastgesteld, levert de berekening van de kwaliteitsfactor van een kring, waarin verschillende weerstanden energie verbruiken, geen grote moeilijkheden op. Voor elke weerstand wordt dan de verhouding van het verbruik tot de energievoorraad berekend, zodat ook het totale energieverbruik ten opzichte van de energievoorraad bekend is en de kwaliteitsfactor van het geheel kan worden bepaald. Zijn er dus n weerstanden werkzaam, die elk voor zich beschouwd resp. de kwaliteitsfactor $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ zouden opleveren, dan geldt voor de kwaliteitsfactor Q van het geheel volgens bovenstaande uiteenzetting:

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_0}{Q_1} + \frac{\omega_0}{Q_2} + \ldots + \frac{\omega_0}{Q_n},$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \ldots + \frac{1}{Q_n} \qquad \textbf{(IV, 11)}$$

In fig. 4.4 zijn de vier mogelijkheden aangegeven waarop een weerstand ten opzichte van een spoel of een condensator in een trillingskring kan zijn opgenomen. Bij elke mogelijkheid is opgegeven hoe groot de kwaliteitsfactor van de betrokken schakeling is.

Bij wijze van voorbeeld zal de kwaliteitsfactor van de schakeling volgens fig. 4.4 B worden berekend. De stroom met amplitude I_0, die door de parallelschakeling van L en R bij de eigenfrequentie f_0 wordt opgenomen, verdeelt zich in de stroom met amplitude I_{L0} door de spoel en de stroom met amplitude I_{R0} door de weerstand. Uit de stroomverdelingswetten $I_0 = I_{L0} + I_{R0}$ en $I_{L0}j\omega_0 L = I_{R0} \cdot R$ volgt dan voor de absolute waarden van I_{L0} en I_{R0}:

$$|I_{L0}| = I_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega_0{}^2L^2}} \text{ en } |I_{R0}| = I_0 \frac{\omega_0 L}{\sqrt{R^2 + \omega_0{}^2L^2}}.$$

Het energieverbruik is nu $\frac{1}{2}R|I_{R0}|^2$, terwijl de energievoorraad $\frac{1}{2}L|I_{L0}|^2$ be-

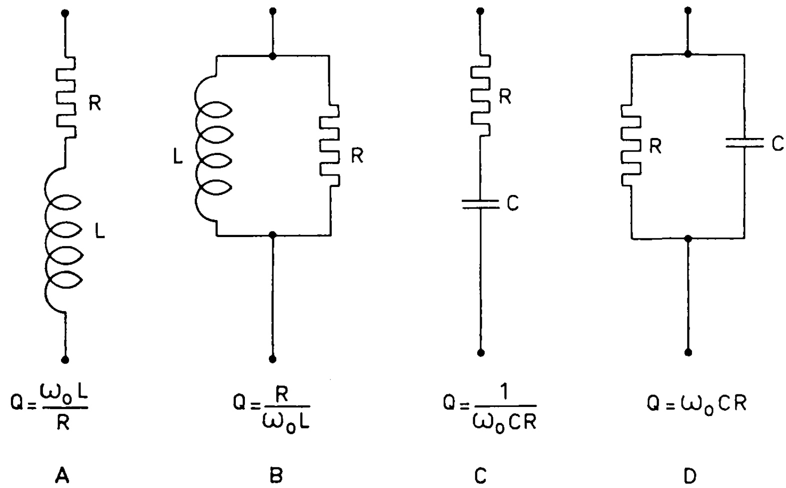

Fig. 4.4

draagt. Derhalve is

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R\omega_0{}^2L^2}{LR^2} = \frac{\omega_0{}^2L}{R},$$

waaruit volgt:

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L}.$$

Bij de berekening voor de schakeling volgens fig. 4.4 D beschouwe men de amplitude $|E_{C0}|$ van de spanning over de condensator. Het energieverbruik is dan $\frac{1}{2}.|E_{C0}|^2/R$, de energievoorraad $\frac{1}{2}C|E_{C0}|^2$. Daaruit volgt de opgegeven Q zonder meer.

Zoals reeds werd opgemerkt, zal bij de in de radiotechniek gebruikelijke gesloten trillingskringen, waarbij $Q \geqq 40$ is, de resonantiefrequentie praktisch gelijk zijn aan de eigenfrequentie van de kring. Men doet er echter goed aan, steeds in gedachte te houden, vooral bij kringen waarbij de totale Q uit verschillende bestanddelen is opgebouwd, dat de resonantiefrequentie kan afwijken van de eigenfrequentie. Als voorbeeld moge de berekening van de resonantiefrequentie van de in fig. 4.5 aangegeven seriekring dienen. De complexe impedantie van deze kring is:

$$Z = R_1 + j\omega L + \frac{R_2\left(\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} = R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}.$$

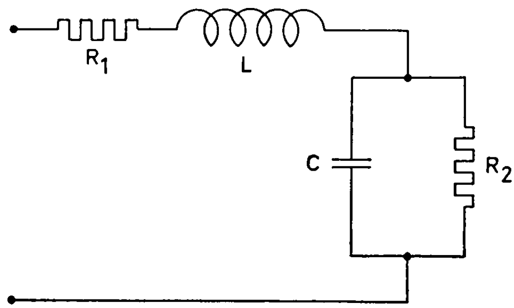

Fig. 4.5

Met invoeren van

$$Q_1 = \frac{\omega_0 L}{R_1},$$

$$Q_2 = \omega_0 C R_2 \text{ en } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

volgt daaruit:

$$Z = R_1\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0} Q_1\right) + \frac{R_2}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0} Q_2} =$$

$$= \frac{R_1\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} Q_1 Q_2\right) + R_2 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}(Q_1 + Q_2)R_1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0} Q_2}.$$

De impedantie is reëel (resonantie) voor de frequentie f_r (cirkelfrequentie ω_r), die voldoet aan:

$$R_1\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Q_1 Q_2\right) + R_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} \cdot R_1,$$

waaruit volgt:

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} = \frac{R_2}{Q_1 Q_2 R_1} - \frac{1}{Q_2^2}.$$

Maar

$$\frac{R_2}{Q_1 Q_2 R_1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1}{\omega_0 L} \cdot \frac{1}{\omega_0 C R_2} = \frac{1}{\omega_0^2 LC} = 1,$$

dus:

$$\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{Q_2^2}$$

of

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_2{}^2}}\,.$$

3. De impedantie van een trillingskring in en buiten resonantie

Bij de bespreking van de resonantiefrequenties van een trillingskring is als uiteindelijk praktisch resultaat gevonden, dat voor radiokringen als resonantievoorwaarde kan worden gesteld, dat er geen phaseverschuiving tussen stroom en spanning bestaat, m.a.w. dat de impedantie van de kring reëel is en de kring zich dus gedraagt als een zuiver ohmse weerstand. Het is van belang te weten, hoe groot die ohmse weerstand is. Aan de andere kant is het van belang te weten van welk karakter de impedantie van de kring is voor frequenties, die afwijken van de resonantiefrequentie, d.w.z. of die impedantie inductief of capacitief is.

3.1. SERIEKRING

Voor de serieschakeling vinden we uit (IV, 1c) door het imaginaire deel gelijk aan nul te stellen ($\beta = 0$):

$$\boldsymbol{Z_{rs} = R} \qquad \textbf{(IV, 12)}$$

In resonantie is de weerstand van de serieschakeling dus gelijk aan de in de kring werkzame weerstand. Dat is tevens de minimum impedantie, die de kring kan vertonen.

Buiten resonantie is de impedantie òf inductief òf capacitief al naar gelang de frequentie hoger of lager dan de resonantiefrequentie is. Dat is gemakkelijk als volgt te beredeneren. In resonantie is de capacitieve reactantie van de kring gelijk aan de inductieve. Is de frequentie nu hoger dan de resonantiefrequentie, dan is de inductieve reactantie dus groter dan de capacitieve reactantie, die er mee in serie staat, zodat de totale reactantie inductief is, ondanks het feit dat er een capaciteit aanwezig is. Voor frequenties, lager dan de resonantiefrequentie kan op dezelfde wijze worden beredeneerd, dat de kring een capacitieve reactantie moet vertonen, ofschoon er een zelfinductie aanwezig is. In voorkomende gevallen kan door middel van (IV, 1c) worden berekend, hoe groot de reactantie van het geheel is en dus ook welke zelfinductie of capaciteit de kring voor de betrokken frequentie vertoont.

3.2. PARALLELKRING

Voor de parallelschakeling vinden we uit (IV, 6) door toepassing van de bij (IV, 6) en (IV, 7) gegeven toelichting voor de impedantie bij resonantie:

$$Z_{rp} = RQ^2 = \frac{\omega_0{}^2 L^2}{R}\,,$$

en na invullen van de uitdrukking voor $\omega_0{}^2$:

$$\boldsymbol{Z_{rp} = \frac{L}{CR}} \qquad \textbf{(IV, 13)}$$

Deze waarde van Z is de grootste, die voor de parallelkring kan optreden, want in resonantie is, bij een gegeven stroom, de spanning over de kring maximum (zie § 4).

Buiten resonantie heeft de impedantie òf een inductief òf een capacitief karakter al naar gelang de frequentie lager dan wel hoger is dan de resonantiefrequentie. Dat is op de volgende wijze te beredeneren. In resonantie zijn de capacitieve en inductieve reactantie gelijk aan elkaar. Is de frequentie nu hoger (lager) dan de resonantiefrequentie dan is de inductieve reactantie hoger (lager) dan de capacitieve. Maar in het onderhavige geval zijn de reactanties parallel geschakeld, zodat de kleinste van de reactanties nu van overwegende invloed zal zijn op de phaseverschuiving tussen stroom en spanning. Daaruit volgt zonder meer, dat bij een frequentie groter (kleiner) dan de resonantiefrequentie de impedantie het karakter zal hebben van een capacitieve (inductieve) reactantie. Natuurlijk is dat in voorkomende gevallen ook te berekenen door toepassing van (IV, 6), door middel waarvan dan ook kan worden bepaald, welke capaciteit, resp. zelfinductie de kring voor de betrokken frequentie vertoont.

4. De resonantiekromme

In het voorgaande werd aangetoond, dat de stroom in een seriekring, resp. de spanning over een parallelkring, bij een willekeurige frequentie lager moet zijn dan bij de resonantiefrequentie. Een goed overzicht van het verloop van de stroom, resp. de spanning in afhankelijkheid van de frequentie krijgt men uit de resonantiekromme, dat is de grafische voorstelling van de stroom of spanning als functie van de frequentie. Om een voor alle gevallen toepasselijk beeld te krijgen, worden deze krommen niet uitgezet met de werkelijke waarden van stroom of spanning, maar met verhoudingsgetallen, die worden berekend door de waarden van stroom of spanning buiten resonantie te vergelijken met die, welke in resonantie optreden. Die verhoudingsgetallen laten zich gemakkelijk berekenen.

In het geval van de seriekring is de complexe uitdrukking voor de stroomamplitude bij een willekeurige frequentie:

$$I = \frac{E}{R(1 + j\beta Q)}\,.$$

In resonantie is $\beta = 0$ en is de stroomamplitude dus:

$$I_0 = \frac{E}{R}\,.$$

De complexe verhouding van de stroom buiten tot de stroom in resonantie is dus:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + j\beta Q}\,.$$

De verhouding van de waarden van de twee stromen, waarvoor we ons bij de resonantiekromme interesseren, is de modulus van die complexe uitdrukking, zodat we vinden:

$$\left|\frac{I}{I_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 Q^2}} \qquad \textbf{(IV, 14)}$$

Voor de berekening van de verhouding van de spanningswaarden in en buiten resonantie van de parallelkring gaan we als volgt te werk. Zoals uit fig. 4.4 A en B blijkt, kunnen we bij gegeven ω_0 en L door een passende keuze van weerstanden dezelfde waarde van Q verkrijgen bij serieschakeling van weerstand en spoel als bij parallelschakeling van weerstand en spoel. Met andere woorden een weerstand in serie met een spoel kan door een denkbeeldige weerstand parallel aan die spoel worden vervangen (of omgekeerd) zonder dat daardoor de kwaliteitsfactor Q van de kring verandert. Daar bij de in de radiotechniek gebruikelijke kringen, de kwaliteitsfactor Q praktisch geen invloed heeft op de in L en C aanwezige energievoorraad, noch op de resonantiefrequentie is de bovengenoemde vervanging alleszins geoorloofd, want de wezenlijke kenmerken van de trillingskring worden daardoor niet aangetast.

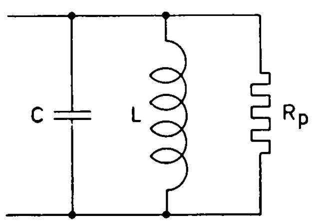

Fig. 4.6

De parallelkring volgens fig. 4.3 kan dus zonder bezwaar vervangen worden gedacht door die volgens fig. 4.6. Daar in beide gevallen de Q van de kring dezelfde moet zijn, moet volgens fig. 4.4 A en B zijn voldaan aan de voorwaarde:

$$R_p = \omega_0 L Q = R Q^2,$$

of, door toepassing van (IV, 13):

$$R_p = Z_{rp} = \frac{L}{CR}\,.$$

De impedantie van de parallelkring volgens fig. 4.6 (parallelschakeling van R_p, L en C) kan het snelst als volgt worden berekend:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R_p} + j\omega C\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) =$$

$$= \frac{1}{R_p}\left\{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\,\omega_0 C R_p\left(1 - \frac{\omega_0{}^2}{\omega^2}\right)\right\}.$$

Daarin is $\omega_0 C R_p$ volgens fig. 4.4 D weer gelijk aan de kwaliteitsfactor Q, zodat we vinden:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_p}(1 + j\beta Q),$$

dus:

$$Z = \frac{R_p}{1 + j\beta Q}\,.$$

Voor de complexe amplitude van de over de kring bij een willekeurige frequentie ontwikkelde spanning vinden we dus:

$$E = \frac{IR_p}{1 + j\beta Q}\,.$$

In het resonantiegeval ($\beta = 0$) is die amplitude:

$$E = IR_p,$$

zodat we voor de complexe verhouding van de spanning buiten tot de spanning in resonantie vinden:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{1 + j\beta Q}\,.$$

Voor de verhouding van de waarden van die spanningen, die maatgevend is voor de betrokken resonantiekromme vinden we dus ook hier:

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{E_0}}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \beta^2 Q^2}} \qquad \textbf{(IV, 15)}$$

Mits ze op dezelfde frequentie resoneren en dezelfde kwaliteitsfactor hebben, is er dus geen verschil in de resonantiekrommen van een seriekring en een parallelkring.

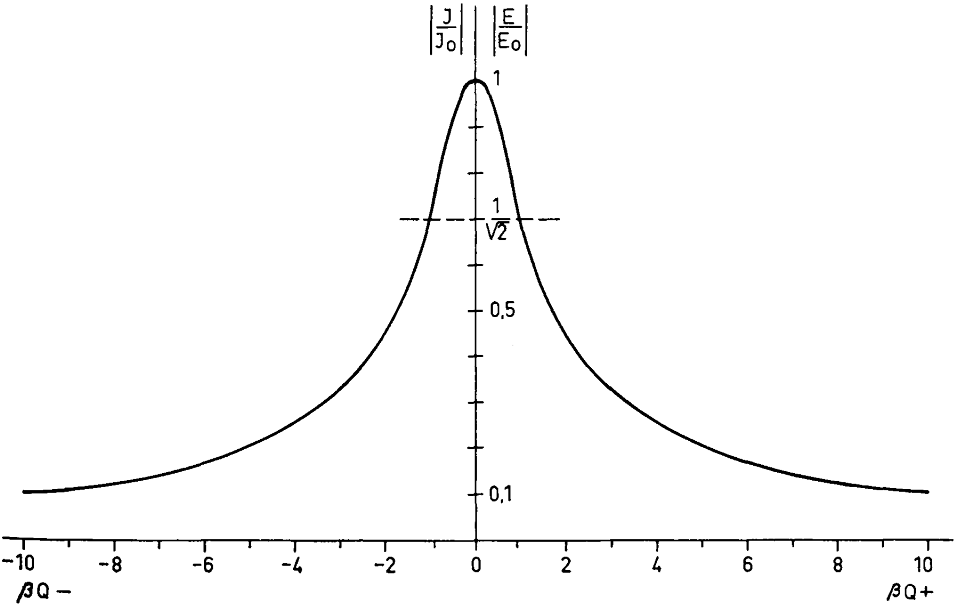

Fig. 4.7

Bij het uitzetten van resonantiekrommen wordt op de as voor de frequentie meestal niet de werkelijke waarde van de frequentie uitgezet, maar vaak het verschil van de beschouwde frequentie met de resonantiefrequentie, de z.g. verstemming Δf. Om een nog algemener beeld te krijgen, dat voor alle gevallen geldig is, kan de kromme echter het beste worden uitgezet als functie van βQ als frequentiebepalende grootheid, dus eigenlijk als functie van de relatieve verstemming. Dat is gedaan in fig. 4.7, die dus een universeel beeld geeft van de resonantiekromme van een gesloten trillingskring.

5. Selectiviteit van een trillingskring. Bandbreedte

Bij de bespreking van de eigenschappen van trillingskringen is gebleken, dat in deze kringen stromen en spanningen, waarvan de frequentie verschilt van de resonantiefrequentie, worden verzwakt ten opzichte van die, welke in resonantie optreden. Door toepassing van trillingskringen, die in resonantie worden gebracht met trillingen van een bepaalde frequentie, die op een bepaalde frequentie worden afgestemd, is het dus mogelijk een bepaalde voorkeur te geven aan, een bepaalde selectie te maken uit de stromen of spanningen van verschillende frequentie, die aan de kring worden toegevoerd. De mate, waarin die selectie plaats vindt wordt de selectiviteit van de kring genoemd. Deze wordt uitgedrukt door de selectiviteitsfactor S, die is gedefinieerd als de verhouding van de resonantiefrequentie tot de verstemming, die vereist is om de stroom in of de spanning over de kring tot $^1/_{10}$ van de waarde bij resonantie te verkleinen. Daar het werken met het begrip selectiviteitsfactor in onbruik is geraakt, zal daaraan geen verdere beschouwing worden gewijd.

Hoewel uit de universele resonantiekromme (zie fig. 4.7) blijkt, dat elke trilling, waarvan de frequentie verschilt van de resonantiefrequentie, door de kring verzwakt wordt ten opzichte van de trilling bij resonantie, is er toch een klein frequentiegebied rondom de resonantiefrequentie aan te wijzen, waarin de verzwakking niet noemenswaard is. Specificatie van dat gebied kan eveneens dienen om een inzicht in de selectieve eigenschappen van een kring te verkrijgen. Bovendien heeft deze wijze van beschouwen het voordeel, dat tevens in het licht wordt gesteld, hoe de kring zich gedraagt ten aanzien van een gemoduleerde trilling, waarbij de overgebrachte informatie aan weerszijden van de draagtrilling een zeker frequentiegebied in beslag neemt (zie hoofdstuk I).

Onder de bandbreedte van een trillingskring wordt het frequentiegebied verstaan, waarin die trillingen liggen, die niet noemenswaard ten opzichte van de resonantietrilling worden verzwakt. Daarbij moet de uitdrukking „niet noemenswaard" nogal ruim worden genomen, want de bandbreedte is vrij algemeen gedefinieerd als het verschil tussen die frequenties, waarbij de trillingen in de verhouding $1 : \sqrt{2}$ ten opzichte van de resonantietrilling worden verzwakt (de genoemde verhouding is in fig. 4.7 aangegeven). De aldus gedefinieerde bandbreedte zal met $B_{\sqrt{2}}$ worden aangegeven. Er komen nl. andere bandbreedte-definities voor, die gebaseerd zijn op een verzwakkingsverhouding $1 : n$. De zo gedefinieerde bandbreedte zal eventueel met B_n worden aangeduid.

Uit de uitdrukkingen (IV, 14) en (IV, 15) volgt zonder meer, dat een verzwakking van stroom of spanning in de verhouding 1 : $\sqrt{2}$ optreedt bij die frequenties, waarvan de relatieve verstemming is bepaald door de voorwaarde $\beta Q = \pm 1$. Voor β kan nu worden geschreven:

$$\beta = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \left(1 + \frac{f_0}{f}\right)\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) = \left(1 + \frac{f_0}{f}\right)\left(\frac{f - f_0}{f_0}\right).$$

Nu is $f - f_0$ gelijk aan de verstemming Δf naar de kant van de hogere frequenties, resp. $-\Delta f$ bij verstemming naar de kant van de lagere frequenties. Als Δf echter klein is ten opzichte van f_0 dan is f_0/f praktisch gelijk aan 1, zodat bij benadering voor β kan woıden geschreven:

$$\beta \simeq \pm \frac{2\Delta f}{f_0} \qquad \textbf{(IV, 16)}$$

Deze benadering van β heeft een fout van $\frac{1}{2}p\%$ als p het percentage van Δf ten opzichte van f_0 is en is voldoende nauwkeurig als Δf niet groter is dan ongeveer 10% van f_0.

Als Δf de verstemming is, hetzij naar de ene of naar de andere kant, om de verzwakking van 1 : $\sqrt{2}$ tot stand te brengen, dan is $2\Delta f$ niets anders dan het verschil tussen de frequenties, waarbij die verzwakking plaats vindt, dus niet anders dan de bandbreedte. Uit de voorwaarde $\beta Q = \pm 1$ en de uitdrukking (IV, 16) volgt dus:

$$\frac{B_{\surd 2}}{f_0} \,.\, Q = 1,$$

dus:

$$B_{\surd 2} = \frac{f_0}{Q} \qquad \textbf{(IV, 17)}$$

Voor de berekening van de bandbreedte B_n voor een verzwakking in de verhouding 1 : n kan een soortgelijke redenering worden gevolgd. Alleen moet men dan enige voorzichtigheid betrachten bij toepassing van (IV, 16) en achteraf wel even controleren of de benadering ook te grof is en zo ja, de berekening herhalen met de preciese uitdrukking voor β om daaruit de frequenties af te leiden, waarbij de verzwakking 1 : n optreedt.

Vraagstukken bij hoofdstuk IV

1. Een seriekring bestaat uit een condensator met capaciteit C, een spoel met zelfinductie L en een weerstand R. De resonantiefrequentie voor gedwongen trillingen is f_0. Als f_1 en f_2 de frequenties zijn, waarbij de stroom in de kring (bij constante aangelegde spanning) tot op de waarde 1 : a van die bij resonantie is gedaald, bewijs dan, dat tussen f_1 en f_2 de volgende betrekkingen bestaan:

$$f_1 . f_2 = f_0^2;\; f_1 - f_2 = \frac{R}{2\pi L} \sqrt{a^2 - 1}.$$

2. Een parallelkring bestaat uit de volgende takken: een capacitieve tak, bestaande uit een capaciteit C in serie met een weerstand R; een inductieve tak, bestaande uit een zelfinductie L eveneens in serie met een weerstand R. Als tussen C, L en R de betrekking $R^2C = L$ bestaat, toon dan aan dat de impedantie van de kring onafhankelijk van de frequentie is en gelijk aan R.

3. Een kring bestaat uit een condensator van 50 pF, waaraan een spoel van 5 μH, die een weerstand van 2 Ω heeft, parallel is geschakeld. Om de bandbreedte $B_{\sqrt{2}}$ van de kring op 250 kHz te brengen wordt een weerstand R parallel aan de condensator geschakeld. Gevraagd: de waarde van R.

Antw.: $R = 17{,}1$ kΩ.

4. Een seriekring bestaat uit een spoel met zelfinductie L, waaraan een weerstand R_1 parallel is geschakeld, en een condensator met capaciteit C, waaraan een weerstand R_2 parallel is geschakeld. Bereken de resonantiefrequentie, aannemende dat R_1 en R_2 niet te verwaarlozen grote waarde hebben. Onder welke omstandigheden, d.w.z. bij welke verhouding van R_1 tot R_2, is de resonantiefrequentie uitsluitend bepaald door L en C?

Antw.: 1. $\omega_2 = \omega_0 \dfrac{R_1}{R_2} \sqrt{\dfrac{L - CR_2^2}{L - CR_1^2}}$.

2. $R_1 = R_2$.

5. Een kring bestaat uit de serieschakeling van:

a. een spoel met zelfinductie L in serie met een weerstand R;

b. een spoel met zelfinductie L en weerstand R (in serie), waaraan een condensator met capaciteit C parallel is geschakeld.

Gevraagd: bij welke frequenties is de impedantie van de schakeling zuiver ohms en hoe groot is die impedantie dan?

Antw.: $\omega_1 = 0$, $Z_1 = 2R$;

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_2 = R + \frac{L}{CR};$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}, \quad Z_3 = 2R.$$